№ 1 Практикалық сабақ
Математикалық индукция әдісі
Жиындарға амалдар қолдану.
Сандық жиынның супремумы және инфинумы.

Математикалық индукция әдісі

№ 2. Математикалық индукция әдісін қолданып кезкелген n натурал сан үшін келесі теңдікті дәлелдеу керек:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Шешуі. 1) $n=1$ үшін орындалатынын тексерейік:

$$1^2=\frac{1\cdot 2\cdot 3}{6} \quad \Leftrightarrow \quad 1=1 \text{ – ақиқат}$$

2). *Кейбір n үшін дұрыс деп ұйғармыз:*

$$1^2+2^2+\ldots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

3). $n+1$*натурал сан үшін формула дұрыстығын дәлелдейміз:*:

$$1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=\frac{(n+1)(n+2)(2n+3)}{6}.$$

► $1^2+2^2+\ldots+n^2+(n+1)^2=$

$$=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2=\frac{n+1}{6}\left[n(2n+1)+6(n+1)\right]=\frac{n+1}{6}\left(2n^2+7n+6\right)=\frac{n+1}{6}(n+2)(2n+3)$$ ◄

Жиындарға амалдар қолдану.

1- Анықтама. Екі жиын тең болады, егер келесі орындалса:

$$A=B \Leftrightarrow \begin{cases} A\subset B \\ B\subset A \end{cases}.$$

2-Анықтама. Екі жиынның бірігуі: $x\in A\bigcup B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A \\ x\in B \end{array}\right.$. (1)

3-Анықтама. *Екі жиынның қиылысуы:* $x\in A\bigcap B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\in B \end{cases}$

Қасиеттері:

$$A\bigcup B=B\bigcup A, \quad (A\bigcup B)\bigcup C=A\bigcup(B\bigcup C),$$
$$A\bigcap B=B\bigcap A, \quad (A\bigcap B)\bigcap C=A\bigcap(B\bigcap C).$$
$$(A\bigcap B)\bigcup C=(A\bigcup C)\bigcap(B\bigcup C) \qquad (3)$$
$$(A\bigcup B)\bigcap C=(A\bigcap C)\bigcup(B\bigcap C) \qquad (4)$$

4-Анықтама. *Жиындардың айырымы*

$$x\in A\setminus B \Leftrightarrow \begin{cases} x\in A \\ x\notin B \end{cases} \qquad (5)$$

5-Анықтама.*Симметриялық айырымы:* $A\Delta B=(A\setminus B)\bigcup(B\setminus A)$;

т.е. $x\in A\Delta B \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x\in A\setminus B \\ x\in B\setminus A \end{array}\right.$ (6)

Мысал. Дәлелдеу керек: $(A\setminus B)'=A'\bigcup B.$

► $\forall x \in (A \setminus B)' \underset{(7)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in S \\ x \notin A \setminus B \end{cases} \underset{(5')}{\Leftrightarrow}$

$$\underset{(5')}{\Leftrightarrow} \begin{cases} x \in S \\ \left[\begin{array}{l} x \notin A \\ x \in B \end{array}\right. \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x \in S \\ x \notin A \end{cases} \\ \begin{cases} x \in S \\ x \in B \end{cases} \end{array}\right. \underset{(7)}{\Leftrightarrow} \left[\begin{array}{l} x \in A' \\ x \in B \end{array}\right. \underset{(1)}{\Leftrightarrow}$$

$\underset{(1)}{\Leftrightarrow} x \in A' \bigcup B \Leftrightarrow (A \setminus B)' \underset{\supset}{\subseteq} A' \bigcup B \Leftrightarrow (A \setminus B)' = A' \bigcup B$ 1-Анықтама бойынша

◄

Сандық жиындардың супремумы және инфинумы.

Есеп. Табу керек: $\sup A$, $\inf A$, егер $A = \left\{ \dfrac{2n-1}{n+1} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Шешімі:

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1} = \frac{2n+2-3}{n+1} = 2 - \frac{3}{n+1} \underset{n\to\infty}{\uparrow} 2.$$

$\sup A$=2, $\inf A$=$\dfrac{1}{2} = a_1$.

$\sup A$**=2.**

►1).2- A жиынының жоғарғы шекарасы екенін көрсетейік: яғни $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1} \le 2 \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

$$\frac{2n-1}{n+1} \le 2$$

$$2n-1 \le 2n+2$$

$$-1 \le 2 \text{ - ақиқат}$$

2). $\forall d < 2 \quad \exists a_{n_d} \in A: \quad a_{n_d} > d$:

$$a_n = \frac{2n-1}{n+1} > d$$

$$2n-1 > nd + d$$

$$n(2-d) > d+1$$

$$n > \frac{d+1}{2-d}, \text{ т.к. } 2-d > 0;$$

$$\Rightarrow \text{ мысалы } n_d = \left[\frac{d+1}{2-d} \right] + 1. ◄$$

$\inf A$=$\dfrac{1}{2}$.

►1). $a_n = \dfrac{2n-1}{n+1} \ge \dfrac{1}{2} \quad \forall n \in \mathbf{N}$.

$$\frac{2n-1}{n+1} \ge \frac{1}{2}$$

$$4n-2 \ge n+1$$

$$3n \ge 3$$

$$n \ge 1 \text{ - верно.}$$

2).

$$\forall d > \frac{1}{2} \quad \exists a_{n_d} \in A: \quad a_{n_d} < d: \; a_1 = \frac{1}{2} < d$$